

# 量子電磁力学と電荷電流密度分布式(1) 7/11/23~12/3

現在電磁場解析 soft 各種が市販され、現場で重用されてるので今更の観も否めないが電磁場解析に於いて肝心の閉自己決定する電荷電流分布方程式が存在しないのは奇妙、閉自己決定の意味は、電荷電流分布波源は波動方程式に従い電磁場決定するが、その電磁場が電荷電流を決定の閉鎖循環での決定算法の事です。筆者は業務開発途上で電磁場解析手段に困窮し、自力開発してしまったので以下紹介。次期紹介算法は有償譲渡予定。

☞: 本 site は server より業務広告許可にあり。URL も今後簡単化予定。

4次元記法と記号規約:  $i^2 \equiv -1$ . Greek:  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ; Latin:  $k, l = 1, 2, 3$  (空間成分).

$$x_\mu \equiv (x_0 = ict, x_1, x_2, x_3) \equiv (x_0, \mathbf{x}) \equiv (x_0, x_k).$$

$$A_\mu \equiv (A_0 = i\phi/c, A_1, A_2, A_3) \equiv (A_0, \mathbf{A}) \equiv (A_0, A_k).$$

$$j_\mu \equiv (j_0 = ic\rho, j_1, j_2, j_3) \equiv (j_0, \mathbf{j}) \equiv (j_0, j_k).$$

$$\partial_\mu \equiv \partial / \partial x_\mu; \partial_x \equiv \partial / \partial \mathbf{x}; \partial_t \equiv \partial / \partial t; \partial_t^2 \equiv (\partial / \partial t)^2.$$

$$\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \partial_k \partial_k \equiv \sum_{k=1}^3 \partial_k^2 \equiv \sum_{k=1}^3 (\partial / \partial x_k)^2. \text{ <同じ添字対は総和を取る Einstein 規約>}$$

$$\square \equiv \sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu \partial_\mu \equiv \partial_\mu \partial_\mu \equiv -c^2 \partial_t^2 + \Delta.$$

$$\mathbf{r} \equiv (x_1, x_2, x_3).$$

$$\iiint dx_1 dx_2 dx_3 \equiv \iiint dx^3 \equiv \iiint dr^3.$$

< $c = 1/\sqrt{\epsilon \mu}$  ≡ 光速,  $\epsilon$  ≡ 誘電率,  $\mu$  ≡ 透磁率>

使用頻度の高い vector 解析公式:

$$(1) \text{grad}(\chi \psi) = \psi \text{grad} \chi + \chi \text{grad} \psi.$$

$$(2) \text{div}(\psi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \text{grad} \psi + \psi \text{div} \mathbf{A}.$$

$$(3) \text{curl} \text{curl} \mathbf{A} = \text{grad} \text{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

$$(4) \oint d\mathbf{S} \cdot \text{curl} \mathbf{A} = \oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}.$$

$$(5) \iiint dv \cdot \text{div} \mathbf{A} = \oint d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}.$$

$$(6) \iiint dv \cdot \text{curl} \mathbf{A} = \oint d\mathbf{S} \times \mathbf{A}.$$

$$(7) \iiint dv \cdot \text{grad} \psi = \oint d\mathbf{S} \cdot \psi.$$

$$(8)$$

$$(9) \text{curl} \text{grad} \psi = 0.$$

$$(10) \text{div} \text{curl} \mathbf{A} = 0.$$

☞: 本文 PDF 化では <vector 太文字> と <通常文字> が

判別しずらく、倍率 150% up しないと **誤読危険** あり。

## [1]量子電磁場解析の基礎:

### ①正準形式の古典電磁力学:

量子化の正式作法に依拠する為の予行として正準形式の古典電磁力学を復習。

#### ①古典電磁力学の Lagrangean 密度: $\langle \Rightarrow : E = E^l + E^t \rangle$

- (1)  $B = \text{curl } A, \quad \rightarrow$   
 $E^l = -\text{grad } \phi, \quad \rightarrow \text{div } D^l = \rho^B. \quad \langle \text{誘導分極電荷, これは量子論概念で古典論では無} \rangle.$   
 $E^t = -\partial_t A, \quad \rightarrow \text{div } D^t = \rho, \quad \langle \text{実電荷} \rangle.$

$\Rightarrow$ : 本論では誘電分極的縦波電界  $l$  と spin 整列磁界的横波電界  $t$  を厳格に区別する。前者の div は誘導分極電荷、後者は実電荷で作用が異質になる。

$$\begin{aligned} (2) \mathcal{L}_0 &\equiv - (1/2\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \equiv - (1/2\mu) \sum_{\mu < \nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \\ &= - (1/2\mu) \sum_{k=1}^3 (\partial_0 A_k - \partial_k A_0)^2 - (1/4\mu) \sum_{k < l=1}^3 (\partial_k A_l - \partial_l A_k)^2 \\ &= - (1/2\mu) (\partial_t A / ic - i \text{grad } \phi / c)^2 - (1/2\mu) (\text{curl } A)^2 \\ &= (1/2c^2\mu) (-\partial_t A - \text{grad } \phi)^2 - (1/2\mu) B^2 = \frac{1}{2} (ED - HB)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) P_k &= \partial \mathcal{L}_0 / \partial (\partial_t A_k) = \partial \mathcal{L}_0 / ic \partial (\partial_0 A_k) = - (ic\mu)^{-1} (\partial_0 A_k - \partial_k A_0) \\ &= (c^2\mu)^{-1} (\partial_t A + \text{grad } \phi)_k = -D_k. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ :  $\mathcal{L}_0$  中には  $(\partial_t A_0)$  が存在せず、したがって  $P_0 = 0$  になって  $A_0$  の正準共役変数が存在せず、古典論はそのままで量子化不可能になる事が判る。

$$\begin{aligned} (4) \mathcal{H}_0 &= -\partial_t A_k D_k - \mathcal{L}_0 = E^t_k (E^t_k + E^l_k) - \frac{1}{2} (ED - HB)^2 = \frac{1}{2} (ED + HB)^2 - E^l D. \\ E^t &= -\partial_t A \text{ だから } \mathcal{H}_0 \text{ はすつきり } \frac{1}{2} (ED + HB)^2 \text{ とならず } -E^l D \text{ が付加する。} \end{aligned}$$

### ② Euler 微分から得る古典電磁場方程式:

$$(1) \mathcal{L}_{CED} \equiv \mathcal{L} \equiv - (1/2\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + j_\mu A_\mu.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ Euler 微分から Euler 方程式を得る: } 0 &= \partial \mathcal{L} / \partial \phi_\alpha - \partial_\mu [\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\mu \phi_\alpha)]. \\ 0 &= \partial \mathcal{L} / \partial A_\nu - \partial_\mu [\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\mu A_\nu)] = j_\mu + (1/\mu) \partial_\mu [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] \\ &= j_\mu + (1/\mu) [\partial_\mu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu A_\mu]. \Rightarrow \square A_\nu - \partial_\nu (\partial_\mu A_\mu) = -\mu j_\mu. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ Lorentz gauge: } 0 &= \partial_\mu A_\mu \text{ での波動方程式: } \square A_\nu = -\mu j_\mu. \\ \text{古典電磁界は } \text{curl } E^t &= -\partial_t B. \text{ で } E^t, B \text{ の一方 3 成分で全電磁界電決定だから 3 自由度。} \\ \text{div } E^t &= \rho / \epsilon. \rightarrow \square \phi = -\rho / \epsilon. \quad A_\nu \text{ は 4 成分だから一つ自由度が多すぎる。} \end{aligned}$$

$$(4) \text{ 古典の Hamiltonian 密度. } \langle \text{量子論では } \text{div } D = \rho + \langle \rho^B \rangle \text{ だが、古典論は } \text{div } D = \rho \rangle.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{CED} &= ic \partial_0 A_\mu P_\mu - \mathcal{L}_{CED} \\ &= -ic \partial_0 A_k D_k + (1/2\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - j_\mu A_\mu = \frac{1}{2} (ED + HB)^2 - E^l D - j_\mu A_\mu \\ &= \frac{1}{2} (ED + HB)^2 + D \text{grad } \phi - j_\mu A_\mu = \frac{1}{2} (ED + HB)^2 + \text{div}(\phi D) - \phi \text{div } D - j_\mu A_\mu \\ &= \frac{1}{2} (ED + HB)^2 + \text{div}(\phi D) - \phi (\rho + \langle \rho^B \rangle) - j_\mu A_\mu \\ &= \frac{1}{2} (ED + HB)^2 - j A - \langle \phi \rho^B \rangle + \text{div}(\phi D). \quad [\Rightarrow : \text{div}(\phi D) \text{ は表面積分化で } 0]. \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{CED} = \frac{1}{2} (ED + HB)^2 - j A.$$

$\Rightarrow$ : なぜ  $+\rho\phi$  が加算されないか?  $-ic \partial_0 A_k D_k = ED$  と誤ると  $\mathcal{H}_{CED} = \frac{1}{2} (ED + HB)^2 - j_\mu A_\mu$ . 筆者は後者採用の場合がある。正準形式は権化だが完全かには今一つ疑問。後にも scalar 場では似た事情がおきる。そも真空偏極反応は確率 0 での論理矛盾存在。

## ②量子電磁場力学(QED)の基礎:

本論の量子電磁力学は素粒子議論の為でなくマクロな誘電分極場(B波発電技術)を解析する為が開発された。量子論の演算子q代数は無用で、c数での議論は古典論に同じ。されど誘電分極場解析には量子化された電磁力学が必須になる。それは単純な双極容量を考察すれば判る。古典論によれば  $\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D}$ . 古典論によれば双極容量中には変位電流  $\partial_t \mathbf{D}$  が流れると言う、ならば双極容量側壁周囲には磁界Hが発生する。正しい電磁場式は  $\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}^B + \partial_t \mathbf{D}$ . 縦波変異電流  $\partial_t \mathbf{D}^1$  と逆方向の誘導分極電流密度  $\mathbf{j}^B$  が相殺する事で磁界0。本論は正準量子化が正しく誘導分極電流(密度)  $\mathbf{j}^B$  を導出する事も明かす。本章では量子電磁力学基礎方程式と関連関係式, QED Hamiltonian 等を提示する。

### ①電磁場の正準量子化と双極子密度場のB場変数導入<sup>1)</sup>:

①(3)で  $\mathcal{L}_0$  中には  $(\partial_t A_0)$  が存在せず, したがって  $P_0=0$  になって  $A_0$  の正準共役変数=0. 古典論はそのままで量子化不可能になる事が判る事を指摘した。だから正しい量子場論では  $A_0$  の正準共役変数Bに係る Lagrangean 項  $\mathcal{L}_B = icB \partial_0 A_0 + \dots$  が存在、4次元対称性から  $\partial_0 A_0 \rightarrow \partial_\mu A_\mu$ . Bの変分を取ると  $0 = \partial_\mu A_\mu$  の Lorentz gauge でまずい。そこで電磁界に energy 項に習い  $\frac{1}{2} \alpha BB$  を追加する。  $\alpha$  は後に決定する。

<sup>1)</sup>R. Utiyama, Prog. Theo. Phys. Suppl. 9(1959), 19~44.

$$\textcircled{2}\textcircled{1} \quad \mathcal{L}_B = icB \partial_\mu A_\mu + \frac{1}{2} \alpha BB.$$

### ②量子電磁力学の全 Lagrangean $\mathcal{L}_{QED} =$ 古典場 Lagrangean $\mathcal{L}_{CED} + \mathcal{L}_B$ :

$$\textcircled{2}\textcircled{2} \quad \mathcal{L}_{QED} = - (1/2\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + icB \partial_\mu A_\mu + \frac{1}{2} \alpha BB + j_\mu A_\mu.$$

### ③QEDの2階の基礎方程式(Euler微分):

#### ① $A_\nu$ 場:

$$0 = j_\mu + (1/\mu) \partial_\mu [(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] - ic \partial_\mu B. \rightarrow$$

$$(1)' \quad \square A_\nu - \partial_\nu (\partial_\mu A_\mu) = -\mu (j_\nu - ic \partial_\nu B) \equiv -\mu (j_\nu + j_\nu^B).$$

$$(2) \quad j_\mu^B \equiv -ic \partial_\mu B \equiv (ic \rho^B, \mathbf{j}^B).$$

$$(3) \quad -\partial_0 B \equiv \rho^B.$$

⇨: 古典論①②(2)と比較すればB場分極電流  $j_\mu^B \equiv -ic \partial_\mu B$  が追加.

古典論との違いは唯一この  $j_\mu^B$  の出現。今後  $j_\mu$  は物理電流(実電流)と呼ぶ。だから

$$(4) \quad \text{古典論} \rightarrow \text{量子論の変換は、} j_\mu \rightarrow (j_\mu - ic \partial_\mu B) \text{ と置換すればよい。}$$

#### ② B場:

$$(5) \quad 0 = ic \partial_\mu A_\mu + \alpha B.$$

$$\square A_\nu - \partial_\nu (\partial_\mu A_\mu) = -\mu (j_\nu - ic \partial_\nu B).$$

$$0 = \square \partial_\nu A_\nu - \partial_\nu \partial_\nu (\partial_\mu A_\mu) = -\mu (\partial_\nu j_\nu - ic \partial_\nu \partial_\nu B). \quad \langle \text{QED4元電流則} \rangle$$

$$(6) \quad \square B = (ic)^{-1} \partial_\nu j_\nu.$$

$$\square A_\nu = -\mu j_\nu + ic\mu(1+\alpha\varepsilon)\partial_\nu B.$$

$$\square \partial_\nu A_\nu = -\mu \partial_\nu j_\nu + ic\mu(1+\alpha\varepsilon)\square B.$$

$$\square \partial_\nu A_\nu = -(\alpha/ic)\square B = -(\alpha/ic)(ic)^{-1}\partial_\nu j_\nu = -\mu \partial_\nu j_\nu + ic\mu(1+\alpha\varepsilon)\square B. \\ (1+\alpha\varepsilon) = 0. \quad (\alpha/ic)(ic)^{-1} = -\mu$$

(7)  $\alpha = -1/\varepsilon$ .  $\Rightarrow$  : guage 定数  $\alpha$  はかように一意決定。従来論では任意の誤解がある事に警戒。

(7)の結果を  $\square A_\nu = -\mu j_\nu + ic\mu(1+\alpha\varepsilon)\partial_\nu B = -\mu j_\nu$ . 古典論と同一化する！。

### ③—2階の量子 Maxwell 方程式—

$$(1) \quad \square A_\nu = -\mu j_\nu.$$

$$(2) \quad j^B_\mu \equiv -ic \partial_\mu B \equiv (ic \rho^B, j^B).$$

$$(3) \quad -\partial_0 B \equiv \rho^B.$$

$$(4) \quad 0 = ic \partial_\mu A_\mu + \alpha B. \quad \Leftrightarrow \quad B = ic\varepsilon \partial_\mu A_\mu.$$

$$(5) \quad \square B = (ic)^{-1} \partial_\nu j_\nu. \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\nu (j_\nu + j^B_\nu) = 0. \quad \dots\dots(6)$$

$$(7) \quad \alpha = -1/\varepsilon.$$

$$(8) \quad \square A_0 = -\mu j_0. \rightarrow \square \phi = -\rho/\varepsilon. \rightarrow \square E^I = \text{grad}(\rho/\varepsilon). \quad \dots\dots(9)$$

$$(10) \quad \square A_k = -\mu j_k. \rightarrow \square E^t = \mu \partial_t j.$$

$$(11) \quad \square A_k = -\mu j_k. \rightarrow \square H = -\text{curl} j.$$

(1)式は古典論と全く同一化してる。古典論と唯一異なるB場(6)式右辺は物理電流保存則であり、常識では量子雑音的要素以外では0なはずである。だが電流進行方向では実は磁界0だから電流が見えず、電荷変動のみが観測されると言う状況が発生する。

「これが coherent B 波の起源になる」。 (6)式が量子論的4元電流保存法則で物理電流+分極電流の総和で成立してる。B波発電では現象解釈で非常に重要になる関係式。(1)(5)の波動方程式は右辺波源の遅延 potential 積分解が知られてる。

### ④ B 場に絡む重要関係式：

$$(1) \quad \rho^B = \text{div } \mathbf{D}^I.$$

$$\rho^B \equiv -\partial_0 B = -\partial_0 (ic\varepsilon \partial_\mu A_\mu) = -\varepsilon \partial_t (-c^2 \partial_t \phi + \text{div } \mathbf{A}) = \varepsilon c^2 \partial_t^2 \phi - \varepsilon \partial_t \text{div } \mathbf{A} \\ = -\varepsilon c^2 \partial_t^2 \phi + \rho = -\varepsilon c^2 \partial_t^2 \phi - \varepsilon \square \phi = -\varepsilon \text{div grad } \phi \equiv \text{div } \mathbf{D}^I.$$

「 $\rho^B$ はかように  $\rho$  電荷波源縦波電位  $\phi$  の誘導分極電荷密度の意味が明白になる」。

$$(2) \quad j^B = -c^2 \int dt \text{grad } \rho - \partial_t \mathbf{D}^I.$$

$$\partial_0 B = \varepsilon \text{div grad } \phi. \rightarrow B = ic\varepsilon \int dt \nabla^2 \phi$$

$$\rightarrow j^B \equiv -ic \text{grad } B = -ic \text{grad } ic\varepsilon \int dt \nabla^2 \phi = -c^2 \int dt \nabla^2 \mathbf{D}^I$$

$$= -c^2 \int dt [\square \mathbf{D}^I + c^2 \partial_t^2 \mathbf{D}^I] = -c^2 \int dt \text{grad } \rho - \partial_t \mathbf{D}^I.$$

(a)絶縁体中( $\rho=0$ )では  $0 = j^B + \partial_t \mathbf{D}^I$  で変位電流と相殺。→ 容量の無磁界性証明！。

(b)導体中( $\rho \neq 0$ )では金属表面上の電荷密度傾斜駆動で流れる。 $j^B = -c^2 \int dt \text{grad } \rho$ 。

impedance が擬似L性である事に注目、しかも導体中だから  $j^B$  は実電荷のはず！、だが電荷密度傾斜駆動で spin 整列的磁界駆動でない。電流機構を明かす重大関係式！！。詳細は後に議論。

④ QED の 1 階の量子 Maxwell 方程式 :

③①(4)の方針に従い古典論→量子論の変換は、 $j_\mu \rightarrow (j_\mu - ic \partial_\mu B)$  と置換すればよい。  
1 階の方程式も極めて有用になる。違いは(1)(3)(5)に注意！。

①— 1 階の量子 Maxwell 方程式—

- (1)  $\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}^B + \partial_t \mathbf{D}$ .
- (2)  $\text{curl } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ .
- (3)  $\text{div } \mathbf{D} = \rho + \rho^B$ .
- (4)  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ .
- (5)  $0 = ic \partial_\mu A_\mu + \alpha B$ .
  
- (6)  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ .
- (7)  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \equiv \mathbf{D}^t + \mathbf{D}^l$ .
  
- (8)  $\mathbf{B} \equiv \text{curl } \mathbf{A}$ .
- (9)  $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \text{grad } \phi \equiv \mathbf{E}^t + \mathbf{E}^l$ .

② 1 階の量子 Maxwell 方程式の証明 :

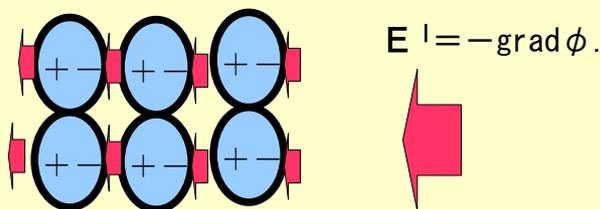
(1)  $\rightarrow \text{curl curl } \mathbf{H} = \text{curl}(\mathbf{j} + \mathbf{j}^B) + \varepsilon \partial_t \text{curl } \mathbf{E}$ .  
 $\text{grad div } \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = \text{curl } \mathbf{j} - \varepsilon \mu \partial_t^2 \mathbf{B}$ .  $\rightarrow \square \mathbf{H} = -\text{curl } \mathbf{j}$ .

(2)  $\rightarrow \text{curl curl } \mathbf{E}^t = -\mu \partial_t \text{curl } \mathbf{H} = -\mu \partial_t(\mathbf{j} + \mathbf{j}^B + \partial_t \mathbf{D})$ .  
 $\text{grad div } \mathbf{E}^t - \nabla^2 \mathbf{E}^t = -\varepsilon \mu \partial_t^2(\mathbf{E}^t + \mathbf{E}^l) - \mu \partial_t \mathbf{j} - \mu \partial_t \mathbf{j}^B$ .  
 $\square \mathbf{E}^t = \mu \partial_t \mathbf{j} + (\varepsilon \mu \partial_t^2 \mathbf{E}^l + \mu \partial_t \mathbf{j}^B + \text{grad div } \mathbf{E}^t) = \mu \partial_t \mathbf{j}$ .  $\rightarrow \square \mathbf{E}^t = -\mu \partial_t \mathbf{j}$ .

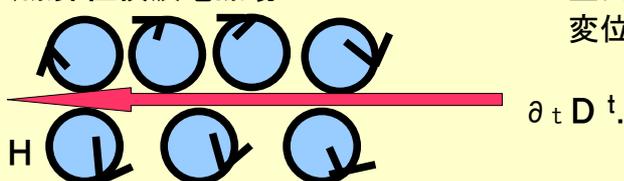
$\mu \partial_t \mathbf{j}^B + \varepsilon \mu \partial_t^2 \mathbf{E}^l + \text{grad div } \mathbf{E}^t = -\mu (c^2 t \text{grad } \rho + \partial_t^2 \mathbf{D}^l) + \varepsilon \mu \partial_t^2 \mathbf{E}^l + \varepsilon \text{grad } \rho$ .

③ 誘導分極性縦波電界場と磁界性横波電磁場の相違<その物理描像> :

(1) 誘導分極性縦波電界場 :



(2) 磁界性横波電磁場 :



「整列 spin 電流層の上下密度相殺ギャップが  
変位電流 =  $\partial_t \mathbf{D}^t$ 」.

**⑤ QED の Hamiltonian 密度.**

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{QED}} &= ic \partial_0 A_\mu P_\mu - \mathcal{L}_{\text{QED}} = ic \partial_0 A_0 B - ic B \partial_\mu A_\mu - \frac{1}{2} \alpha BB + \mathcal{H}_{\text{CED}} \\ &= -\frac{1}{2} \alpha BB + \mathcal{H}_{\text{CED}} - ic B \partial_k A_k = -\frac{1}{2} \alpha BB + \mathcal{H}_{\text{CED}} + ic \partial_k B A_k - ic \partial_k (B A_k) \\ &= -\frac{1}{2} \alpha BB + \mathcal{H}_{\text{CED}} - j^B A - ic \partial_k (B A_k). \quad \langle \text{最終項は表面積分化で 0} \rangle \end{aligned}$$

① 正準形式に完全に従う場合： $\mathcal{H}_{\text{CED}} = \frac{1}{2} (ED + HB)^2 - jA$ .

→  $\mathcal{H}_{\text{QED}} = -\frac{1}{2} \alpha BB + \frac{1}{2} (ED + HB)^2 - (j + j^B)A$ .

☞： $\rho \phi, \rho^B \phi$  も落ちる。

縦波項  $(j_0 + j^B_0) A_0$  が落ちて良い理由がある。実は  $\frac{1}{2} ED$  に横波成分  $l$  と縦波成分  $t$  があり、後者内容には  $(j_0 + j^B_0) A_0$  が含まれて来るからだ。

② 物理的要請に従う場合： $\mathcal{H}_{\text{CED}} = \frac{1}{2} (ED + HB)^2 - j_\mu A_\mu$ .

→  $\mathcal{H}_{\text{QED}} = -\frac{1}{2} \alpha BB + \frac{1}{2} (ED + HB)^2 - (j_\mu + j^B_\mu) A_\mu$ .

☞：古典論で  $\rho \phi$  を加算した以上は  $\rho^B \phi$  も落とす事が出来ない。筆者は(2)選択！  
B 場は非可観測な 0 確率の真空偏極の場、矛盾的でも実質支障がない。

**⑤(2)**  $\mathcal{H}_{\text{QED}} = -\frac{1}{2} \alpha BB + (1/2) (ED + HB) - (j_\mu + j^B_\mu) A_\mu$ .

**③ 純 scalar 場の Hamiltonian 密度：**

B 波発電主題はこの scalar 場、(2)  $\mathcal{H}_s$  の場は energy 土分離反応に対応して来る。

$\square \phi = -\rho / \epsilon$ . ..... ④(8)

$B = ic \epsilon \partial_0 A_0 = -\epsilon \partial_0 \phi$ .      ☞：B は実変数にならず、虚変数！

⑤(2) で  $j = A = 0$  と置く磁界 0 の場が  $\phi$  のみの純 scalar 場。

(1)  $\mathcal{L}_s = -(1/2 \mu) (\partial_\mu A_0 - \partial_0 A_\mu)^2 + ic B \partial_0 A_0 + \frac{1}{2} \alpha BB + j_0 A_0$   
 $= (1/2) E^2 + ic B \partial_0 A_0 + \frac{1}{2} \alpha BB + j_0 A_0$   
 $= \frac{1}{2} \epsilon (\partial_k \phi)^2 - \rho \phi - B \partial_0 \phi + \frac{1}{2} \alpha BB$ .

→  $0 = \partial \mathcal{L} / \partial A_0 - \partial_\mu (\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\mu A_0)) = -\rho - \epsilon \partial_k^2 \phi + \partial_0 B$   
 $= -\rho - \epsilon \partial_k^2 \phi + \partial_0 (\partial_0 \phi / \alpha) = -\rho - \epsilon \partial_\mu^2 \phi$ . →  $\square \phi = -\rho / \epsilon$ .  
 →  $0 = -\partial_0 \phi + \alpha B$ . →  $B = -\epsilon \partial_0 \phi$ .

☞：上記には一つの fiction がある。純 scalar 場の定義は磁界 0 = 物理電流 0 だが、それで居て波源の電荷は物理電荷  $\rho$  を仮定してる一つの矛盾性である。だがこの fiction がないと  $\square \phi = -\rho / \epsilon$  を得る  $\mathcal{L}_s$  は決まらない事になる。

☞： $\square B = (ic)^{-1} \partial_\nu j_\nu$  は既述如く 4 元電流則擬似破綻が必要だからである。電流がないのに電荷変動が見える理屈(お化け水道の模型) <非可観測 0 確率真空偏極場>。

☞: 下記にも一つの fiction がある。純 scalar 場の定義は磁界  $0 =$  物理電流  $0$  だが、それで居て波源の電荷は物理電荷  $\rho$  を仮定して  $\square \phi = -\rho/\epsilon$  を得た。  $\mathcal{H}_s$  決定では今度は energy 保存則と言う強い要請で ( $\rho \rightarrow \rho^B$ ) とせねばならない。

☞:  $\rho^B$  は確かに実数だが 大元の  $B = -\epsilon \partial_0 \phi$  は実数でない。物理的に分極電荷は実数なれど物理的非可能観測量なので正 energy 項  $\rho^B \phi$  に  $\rho^B$  が必須になる。

☞: 物理真空は本来非可能観測な世界で矛盾的存在である〈非可観測  $0$  確率真空偏極場〉。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s &= ic \partial_0 A_0 B - \mathcal{L}_s \\ &= ic \partial_0 A_0 B - \frac{1}{2} \epsilon (\partial_k \phi)^2 + \rho^B \phi + B \partial_0 \phi - \frac{1}{2} \alpha BB. \\ &= -\frac{1}{2} \alpha BB - \frac{1}{2} \epsilon (\partial_k \phi)^2 + \rho^B \phi. \end{aligned}$$

$$(2) \quad \mathcal{H}_s = -\frac{1}{2} \alpha BB - \frac{1}{2} \epsilon (\partial_k \phi)^2 + \rho^B \phi.$$

(2)の第 1, 2 項が負 energy, 第 3 項が正 energy になり、両者は相殺する。

(3)一次元平面 scalar 波伝播  $\phi = \sin(\omega t - kx)$  での一周期 energy 保存法則の証明。

$$\phi = \sin(\omega t - kx). \quad \langle k = \omega/c \rangle$$

$$B = -\epsilon \partial_0 \phi = -(\epsilon/ic) \omega \cos(\omega t - kx).$$

$$-\frac{1}{2} \alpha BB = -\frac{1}{2} \epsilon (\omega^2/c^2) \cos^2(\omega t - kx)^2.$$

$$\partial_x \phi = -k \cos(\omega t - kx).$$

$$-\frac{1}{2} \epsilon (\partial_x \phi)^2 = -\frac{1}{2} \epsilon (\omega^2/c^2) \cos^2(\omega t - kx)^2.$$

$$\rho^B = -\epsilon \text{divgrad} \phi = \epsilon (\omega^2/c^2) \sin(\omega t - kx).$$

$$\rho^B \phi = \epsilon (\omega^2/c^2) \sin^2(\omega t - kx)^2.$$

以下で  $\mathcal{H}_s$  の一周期平均を取ると  $\langle \mathcal{H}_s \rangle = 0$  になる〈証明終わり〉。

$$\langle \mathcal{H}_s \rangle = \epsilon (\omega^2/c^2) [-\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle + \langle \sin^2(\omega t - kx) \rangle] = \epsilon (\omega^2/c^2) [-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}] = 0.$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1.$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

かくて⑤②物理的要請に従う場合:  $\mathcal{H}_{\text{QED}} = -\frac{1}{2} \alpha BB + \frac{1}{2} (ED + HB)^2 - (j_\mu + j^B_\mu) A_\mu$ .  
の根拠一つが与えられたと筆者は見る。最終的に実験がこれを支持した。

(4)誘電分極場では同種電荷集積点  $\rho^B \phi$  が斥力密度場で正 energy に、分極場  $-\frac{1}{2} \alpha BB - \frac{1}{2} \epsilon (\partial_k \phi)^2$  が負 energy に対応してる。後者が負 energy に対応する理由は引力場だからである。scalar 波は容量性 impedance 空中線から放射される結果、放射電力は原理的には無電力消費であり、従って放射された scalar 波伝播では 0energy 性としての energy 分離相殺性が了解されると言う次第。しかも電荷密度波である scalar 波を接地電位との間で捕獲すると可能観測な  $\rho \phi > 0$  の電力が捕獲できる。ここでは ( $\rho^B \rightarrow \rho$ ) と受信電極上で逆変換が起きてる。

(5)電荷密度波(=scalar 波)と誘電分極模型：

## [2] 電荷電流密度分布方程式：

電荷分布電流分布  $j_\nu$  が決定すれば遅延 potential  $=A_\nu$  も確かに決定する。然るに元の  $j_\nu$  は電磁場が決定する。この論理循環を閉じて  $j_\nu$  自己決定問題を解析する。

### ① 古典電磁論と横波電界だけからの物性 Ohm 法則 $j = \sigma E^t$ からの $j_\nu$ 自己決定問題：

① Maxwell 方程式からの電荷分布方程式：

$$\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D}^t. \quad \rightarrow \quad \text{div } \mathbf{j} = -\partial_t \rho. \quad \dots (1)$$

② 物性方程式である Ohm 法則： $j = \sigma E^t$  からの第 2 方程式：

$$\textcircled{3} \textcircled{3} (10) \quad \square E^t = \mu \partial_t \mathbf{j}. \quad \rightarrow \quad \square E^t = \mu \partial_t \mathbf{j}. \quad \rightarrow \quad [\square - \sigma \mu \partial_t] \mathbf{j} = 0. \quad \dots (2).$$

「実に正解は横波電界だけからのこの(1)(2)なのである」。なぜ電流電荷方程式が電磁場論教科書に乗らないのか?!。(2)表皮深度減衰解が余りに有名で、実は長距離表面伝播波解が存在して現場にあうのだが!。導体中では縦波電界  $E^l$  は高濃度電子により、存在できない、導体中電流は横波磁界性の spin 整列円環電流のみなのである。

☞: 但し量子論視点では上記横波電流以外に電荷密度傾斜で駆動される 2 種の電流が存在、幸いにも両者は良導体では高精度で相殺、その結果が上記結論、だから相殺仮定が破綻した状況では量子論現象があるだろう。特に potential 駆動の初期電流。

### ② 量子電磁力学と $j = \sigma (E^t + E^l)$ Ohm 法則での $j_\nu$ 自己決定問題：

① 量子 Maxwell 方程式からの電荷分布方程式：

[1] 部  $\textcircled{3} \textcircled{4} (2)$ 、 $\textcircled{4} \textcircled{1} (1)$  から  $j^b$  式と 1 階量子 Maxwell 方程式を得た。以下の電荷分布式は量子論結論である。

$$\begin{aligned} j^b &= -c^2 \int dt \text{grad } \rho - \partial_t \mathbf{D}^l. \\ \text{curl } \mathbf{H} &= \mathbf{j} + j^b + \partial_t \mathbf{D} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D}^t - c^2 \int dt \text{grad } \rho. \\ 0 &= \text{div curl } \mathbf{H} = \text{div } \mathbf{j} + \partial_t \rho - c^2 \int dt \text{div grad } \rho. \quad \rightarrow (1) \quad \square \rho = c^2 \partial_t \text{div } \mathbf{j}. \end{aligned}$$

② 物性方程式である Ohm 法則： $j = \sigma E$  からの第 2 方程式 (QED 電荷電流分布式)：

$j = \sigma E = \sigma (E^t + E^l)$  の Ohm 法則には飛んだ罫が潜んで居る。実は分極場的縦波電界  $= E^l$  は物理電流  $j$  駆動に寄与しない。正解は  $j = \sigma E^t$  だけなのである。

取りあえず  $j = \sigma (E^t + E^l)$  を仮定してみよう。以下の(2)の如く簡単に決定するがこれは豚でもない解をも導く。 $\textcircled{3} \textcircled{3}$  2 階の量子 Maxwell 方程式は、

$$(9) \quad \square E^l = \text{grad}(\rho / \epsilon).$$

$$(10) \quad \square E^t = \mu \partial_t \mathbf{j}.$$

$$\square (E^t + E^l) = \mu \partial_t \mathbf{j} + \text{grad}(\rho / \epsilon). \quad (2) \quad \square \mathbf{j} = \sigma \mu \partial_t \mathbf{j} + \sigma \text{grad}(\rho / \epsilon).$$

### — 量子電荷電流分布方程式 —

$$(1) \quad \square \rho = c^2 \partial_t \text{div } \mathbf{j}.$$

$$(2) \quad [\square - \sigma \mu \partial_t] \mathbf{j} = (\sigma / \epsilon) \text{grad } \rho.$$

③ QED 電荷電流分布式の Fourier 変換解：上記(1)(2)連立式は 4 次元 Fourier 変換で解ける。

(1) 4 次元 Fourier 変換：

$$x_\mu \equiv (x_0=ict, \mathbf{x}),$$

$$k_\mu \equiv (x_0=i\omega/c, \mathbf{k}),$$

$$x_\mu k_\mu \equiv -\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x} \equiv kx.$$

$$(2\pi)^{-4} \int \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} dx^4 \exp(ix_\mu k_\mu) \equiv (2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^4 e^{-ikx} \equiv \delta^4(x_\mu) \\ \equiv \delta(x_0) \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3).$$

$$k^2 = -(\omega/c)^2 + \mathbf{k}^2 \equiv -(\omega/c)^2 + K.$$

$$\rho(x) = (2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^4 e^{-ikx} P(k).$$

$$\mathbf{j}(x) = (2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^4 e^{-ikx} \mathbf{J}(k).$$

(2) 上記②(1)(2)→(3)(4)→(5).

$$(1) \square \rho = ic^{-1} \partial \text{div} \mathbf{j}. \quad \rightarrow \quad -kkP = ic^{-1} (-ik_0) \langle -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{J} \rangle = -ic^{-1} k_0 \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{J} \rangle. \dots\dots\dots(3)$$

$$(2) [\square - ic\sigma\mu\partial_0] \mathbf{j} = (\sigma/\epsilon) \text{grad} \rho. \quad \rightarrow \quad [-kk - c\sigma\mu k_0] \mathbf{J} = (\sigma/\epsilon) \langle -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \rangle \dots\dots\dots(4)$$

$$(5) P = ic^{-1} k_0 \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{J} \rangle / k^2;$$

$$\mathbf{J} = i(\sigma/\epsilon) \mathbf{k} \cdot P / [kk + c\sigma\mu k_0].$$

$$\rightarrow P = -c^{-1} k_0 (\sigma/\epsilon) P \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \rangle / k^2 [kk + c\sigma\mu k_0]. \quad \rightarrow \quad k^2 [kk + c\sigma\mu k_0] = -i\omega\sigma\mu \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \rangle$$

$$\rightarrow [-(\omega/c)^2 + K] [-(\omega/c)^2 + K + i\omega\sigma\mu] = -i\omega\sigma\mu K.$$

$$\rightarrow K^2 - 2K \langle (\omega/c)^2 - i\omega\sigma\mu \rangle + (\omega/c)^4 - i\omega\sigma\mu (\omega/c)^2.$$

$$\rightarrow k^2 = \langle (\omega/c)^2 - i\omega\sigma\mu \rangle \pm \sqrt{[\langle (\omega/c)^2 - i\omega\sigma\mu \rangle^2 - (\omega/c)^4 + i\omega\sigma\mu (\omega/c)^2]}$$

$$= \langle (\omega/c)^2 - i\omega\sigma\mu \rangle \pm \sqrt{[-\langle \omega\sigma\mu \rangle^2 - i\omega\sigma\mu (\omega/c)^2]}$$

$$= \langle (\omega/c)^2 - i\omega\sigma\mu \rangle \pm i\omega\sigma\mu \sqrt{[1 + i(\omega\epsilon/\sigma)]}.$$

本論では RF 良導体での電流を対象にするので、例えば MKSA 単位系で  $f=200\text{MHz}$ 、 $\sigma(\text{銅})=5.8 \times 10^7 \text{moh/m}$ 、 $\epsilon_0=8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$ 、 $\mu_0=4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ 、などの場合  $(\omega\epsilon/\sigma)=1.9 \times 10^{-10} \ll 1$ 、圧倒的高精度で  $\sqrt{[1 + i(\omega\epsilon/\sigma)]} = 1$  が成立する。

$$\rightarrow k^2 = (\omega/c)^2. \rightarrow k^2 = 0. \rightarrow P = ic^{-1} k_0 \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{J} \rangle / k^2 \rightarrow \text{発散で矛盾化。}$$

$$\rightarrow k^2 = (\omega/c)^2 - 2i\omega\sigma\mu \doteq -2i\omega\sigma\mu. \rightarrow |\mathbf{k}| \doteq \sqrt{(\omega\sigma\mu)} - i\sqrt{(\omega\sigma\mu)}.$$

$$\rightarrow \mathbf{J}(k) = i(\sigma/\epsilon) \mathbf{k} \cdot P / [-i\omega\sigma\mu] \doteq - (c^2/\omega) \mathbf{k} \cdot P = -c \langle (\mathbf{k}(c/\omega)) \rangle P \equiv \mathbf{J}_B.$$

$$\mathbf{J}(k) = -c \langle (\mathbf{k}(c/\omega)) \rangle P \equiv \mathbf{J}_B. \dots\dots\dots(5)$$

(6)電荷密度傾斜電流の相殺：

$$\begin{aligned}
j(x) &= (2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^4 e^{-ikx} J_B(k) = -c(c/\omega) (2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^4 e^{-ikx} k P(k) \\
&= -ic(2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^4 e^{-ikx} (c/-i^2\omega) (-ik) P(k) = -ic \int dx_0 \text{grad} \rho(x) \\
&= c^2 \int dt \text{grad} \rho(x) \equiv j_B.
\end{aligned}$$

「この電流  $J_B = -c \langle k(c/\omega) \rangle P$  は逆走電流  $j_B = -c\rho$  で矛盾している。かつ磁界0の solenoidal」。しかしこの電流は導体中の誘導分極電流  $j^B = -c^2 \int dt \text{grad} \rho - \partial_t D^l = -c^2 \int dt \text{grad} \rho$  と相殺して無害になる事が判る。ただし導体中では  $\partial_t D^l = 0$  にとる。という事は  $\square E^l = \text{grad}(\rho/\epsilon)$  に起因した  $\sigma E^l = 0$  に取るにそもそもから等しい。

$$0 = j_B + j^B. \dots\dots\dots(6) \quad \langle \text{電荷密度傾斜電流の相殺} \rangle$$

では電荷密度傾斜は電流駆動に無寄与かと言うとそうでない。導体表層の高濃度電子海を縦波電界風で揺する事により、表面上に電荷密度傾斜波が発生して電流初動に寄与する。[1]③④にて  $\rho^B \equiv -\partial_0 B = -\partial_0 (ic\epsilon \partial_\mu A_\mu)$ . もし縦波電界  $\partial_0 A_0 = 0$  だと

$$\rho^B = -\partial_t(\epsilon \text{div} A) = \text{div} E^t = \rho.$$

導体中でなんと分極電荷  $\rho^B = \text{div} D^t = \rho$  の実電荷に化けてる事が起きている。しかるに [1]③④(1)で  $\rho^B = \text{div} D^l$  だから導体中では縦波横波区別が消滅してるのかも。

☞：ここで警戒すべきは  $j_B = c^2 \int dt \text{grad} \rho(x)$  は高精度解ではあるが厳密解でない！！。と言う事は厳密解  $j_B$  には何か特別な機能があるかもしれない。特に potential で初期駆動される電流は導体表層の電荷密度傾斜から発生するは明らか。何となれば厳格には  $j_B + j^B \neq 0. \dots\dots\dots(6)'$

(7)電流式(2)斉次解としての有磁界電流  $[\square - \sigma \mu \partial_t] j_A = 0$  :

有磁界な  $\text{curl} j_A \neq 0$  の  $j_A$  の存在は明らか。  $[\square - \sigma \mu \partial_t] j_A = 0. \dots\dots\dots(7).$

(8)電荷密度式再論：

かくて冒頭指摘した横波電流のみの古典論の正しさが改めて確認されるという次第。

$$\begin{aligned}
j &= j_A + j_B. \\
\text{curl} H &= j + \partial_t D^t - c^2 \int dt \text{grad} \rho = j_A + j_B + \partial_t D^t - c^2 \int dt \text{grad} \rho = j_A + \partial_t D^t. \\
0 &= \text{div} j_A + \partial_t \rho. \dots\dots\dots(8).
\end{aligned}$$

(9)[2]物理電荷電流密度分布方程式の要約：

$$\text{curl} j_A \neq 0.$$

$$[\square - \sigma \mu \partial_t] j_A = 0. \dots\dots\dots(7).$$

$$0 = \text{div} j_A + \partial_t \rho. \quad \Leftrightarrow \quad \rho = - \int dt \text{div} j_A. \dots\dots\dots(8).$$

従って  $\sigma > 0$  の導体場では(7)解に従い電流密度分布が決定できる。誤解してはならないのは(7)解には表皮深度短距離減衰解以外に導体表層長距離伝播解も含まれてる点である。平面波解  $j_A = j_0 \exp(-ikx)$  で容易に確認できる。

後書き (07/12/3) :

状況が込み入り、ここで中止します。今後は上記電流機構知見に基づく境界要素法による電磁場決定算法を紹介。本年5月開発だが、半年他業務多忙の空白後に近日ノート紛失、どうなったのか！！.5月頃はやたら建設騒音で業務も止まった時期だった。